1 Антагонистические игры

1.1 Седловые точки и антагонистические игры

стр. 1

Определение. Пару $(x^0, y^0) \in X \times Y$ называют седловой точкой функции $F : X \times Y \to \mathbb{R}$, если верно

$$F(x, y^0) \leqslant F(x^0, y^0) \leqslant F(x^0, y), \quad \forall x \in X,\ y \in Y. \tag{1}$$

стр. 2

Определение. Антагонистической игрой называется набор объектов $\Gamma = \langle X, Y, F \rangle$, где X и Y — множества стратегий, $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша первого игрока.

Определение. Будем говорить, что антагонистическая игра Γ имеет решение, если функция выигрыша первого игрока $F(x, y)$ имеет седловую точку на $X \times Y$. Под решением игры мы понимаем тройку

$$(x^0, y^0, v), \quad v = F(x^0, y^0). \tag{2}$$

Здесь x^0, y^0 — оптимальные стратегии игроков, v — значение антагонистической игры.

Лемма 1. *Пусть функция F имеет две седловые точки на $X \times Y$: (x^0, y^0) и $(x^\star, y^\star)$. Тогда $F(x^0, y^0) = F(x^\star, y^\star)$.*

Определение. Антагонистическая игра Γ называется конечной, если множества стратегий игроков конечны:

$$X = \{1, \ldots, m\}, \quad Y = \{1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Матрицей игры называется $A = (a_{ij}) = (F(i, j))$.

Определение. Пара стратегий (i_0, j_0) называется седловой точкой матрицы A, если

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0 j_0} \leqslant a_{i_0 j}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Определение. Нижним и верхним значением игры называются величины

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y), \tag{5}$$

$$\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y). \tag{6}$$

стр. 3

Определение. Стратегия $x^0 \in X$ называется максиминной стратегией, если

$$\underline{v} = \inf_{y \in Y} F(x^0, y). \tag{7}$$

Стратегия $y^0 \in Y$ называется минимаксной стратегией, если

$$\overline{v} = \sup_{x \in X} F(x, y^0). \tag{8}$$

Лемма 2. *В любой антагонистической игре $\underline{v} \leqslant \overline{v}$.*

Теорема 1. *1. Для того, чтобы функция F имела на $X \times Y$ седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y). \tag{9}$$

Если седловая точка существует, то в соответствующей антагонистической игре $\underline{v} = \overline{v} = v$.

2. *Пусть функция F имеет седловую точку на $X \times Y$, тогда для того, чтобы пара (x^0, y^0) была седловой точкой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}, \quad \sup_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v}. \tag{10}$$

Следствие 1.1. *Если у функции F есть седловые точки, то их множество имеет вид $X^0 \times Y^0$, где*

$$X^0 = \{ x^0 \mid (10) \}, \quad Y^0 = \{ y^0 \mid (10) \}. \tag{11}$$

стр. 5

Определение. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Пару $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in X \times Y$ назовем ε-седловой точкой функции F на $X \times Y$, если

$$F(x, y^\varepsilon) - \varepsilon \leqslant F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leqslant F(y, x^\varepsilon) + \varepsilon, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \tag{12}$$

Определение. Стратегия x^ε — ε-максиминная, если

$$\inf_{y \in Y} F(x^\varepsilon, y) \geqslant \underline{v} - \varepsilon. \tag{13}$$

Стратегия y^ε — ε-минимаксная, если

$$\sup_{x \in X} F(x, y^\varepsilon) \leqslant \overline{v} + \varepsilon. \tag{14}$$

Теорема 2. 1. *Для того, чтобы для любого положительного ε существовала ε-седловая точка, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\underline{v} = \overline{v}, \tag{15}$$

при этом минимум и максимум могут не достигаться.

2. *Пусть выполнено условие (15), $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ — ε-максиминная и ε-минимаксная стратегии, тогда эта пара образует 2ε-седловую точку. Обратно, пусть $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ — ε-седловая точка, тогда это 2ε-максиминная и 2ε-минимаксная стратегии.*

Теорема 3. *Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна на произведении метрических компактов $X \times Y$, тогда*

1. *функция $W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$ является непрерывной на X;*

2. *пусть*

$$\forall x \in X \quad \operatorname*{Arg\,min}_{y \in Y} F(x, y) = \{y(x)\}, \tag{16}$$

тогда функция $y : X \to Y$ непрерывна.

стр. 6

Определение. Игра $\Gamma = \langle X, Y, F \rangle$ называется непрерывной, если множества X и Y — параллелепипеды евклидовых пространств, а функция F непрерывна на $X \times Y$.

Лемма 3. *У любой непрерывной игры существуют максиминная и минимаксная стратегии.*

Теорема 4. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна на произведении выпуклых компактов $X \times Y$ евклидовых пространств E^m, E^n. Пусть при всех $x \in X$ функция $F(x, \cdot)$ является выпуклой по y, и при всех $y \in Y$ функция $F(\cdot, x)$ является вогнутой по x. Тогда существует седловая точка функции F на множестве $X \times Y$.*

стр. 7

Лемма 4. *Пусть $F(x, y)$ непрерывна на произведении выпуклых компактов $X \times Y$, при всех $y \in Y$ вогнута по x, при всех $x \in X$ $y(x)$ — единственный минимум $F(x, y)$, тогда $F(x, y)$ имеет седловую точку $(x^*, y(x^*))$, где x^* — максиминная стратегия первого игрока.*

1.2 Смешанные расширения антагонистических игр

стр. 8

Определение. Смешанной стратегией первого игрока будем называть φ — вероятностную меру на множестве X. “Применить смешанную стратегию φ” означает выбрать реализацию случайной величины $x \in X$, распределенную в соответствии с законом φ.

стр. 9

Определение. Пусть дана антагонистическая игра $\langle X, Y, F\rangle$. Рассмотрим множество смешанных стратегий первого игрока $\{\varphi\}$ и второго игрока $\{\psi\}$,

$$F(\varphi,\psi) = \iint_{X\times Y} F(x,y)d\varphi(x)d\psi(y) = \mathsf{E}\, F(x,y). \tag{17}$$

Тогда новая игра $\hat{\Gamma} = \langle\{\varphi\},\{\psi\},F\rangle$ называется смешанным расширением антагонистической игры Γ.

Определение. Будем говорить, что игра Γ имеет решение в смешанных стратегиях, если имеет решение игра $\hat{\Gamma}$.

Теорема 5 (Основная теорема матричных игр). *Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.*

стр. 10

Определение. Пусть $X = [a,b], Y = [c,d]$, функция F непрерывна на прямоугольнике $X\times Y$. $\{\varphi\}$, $\{\psi\}$ — множества функция распределения на отрезках $[a,b]$ и $[c,d]$,

$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b \int_c^d F(x,y)d\psi(y)d\varphi(x). \tag{18}$$

Тогда $\hat{\Gamma} = \langle\{\varphi\},\{\psi\},F\rangle$ — смешанное расширение непрерывной игры на прямоугольнике.

Лемма 5. *Множество смешанных стратегий первого игрока $\{\varphi\}$ в непрерывной игре является слабо компактным.*

стр. 11

Лемма 6. *В непрерывной игре Γ на прямоугольнике у игроков существуют максиминная и минимаксная смешанные стратегии.*

Лемма 7. *Рассмотрим произвольные игры $\Gamma' = \langle X, Y, F'\rangle$ и $\Gamma'' = \langle X, Y, F''\rangle$. Пусть функции F', F'' ограничены и верно условие близости:*

$$|F'(x,y) - F''(x,y)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in X,\, y \in Y. \tag{19}$$

Тогда $|\underline{v}' - \underline{v}''| \leqslant \varepsilon$, $|\overline{v}' - \overline{v}''| \leqslant \varepsilon$.

Теорема 6 (Основная теорема непрерывных игр на прямоугольнике). *Всякая непрерывная игра на прямоугольнике имеет решение в смешанных стратегиях.*

1.3 Свойства решений антагонистических игр в смешанных стратегиях

стр. 13

Теорема 7. *Пусть Γ — непрерывная игра на прямоугольнике. Для того, чтобы тройка φ^0, ψ^0, v была решением Γ в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(x,\psi^0) \leqslant v \leqslant F(\varphi^0, y), \quad \forall x \in X,\, y \in Y. \tag{20}$$

Замечание. Теорема верна для любых смешанных расширений игр, если только можно применить теорему Фубини для замены двойного интеграла повторным.

стр. 14

Теорема 8. *Пусть $\Gamma = \langle X, Y, F\rangle$ — непрерывная игра на прямоугольнике, тогда для всех $\varphi \in \{\varphi\}$ верно*

$$\inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi) = \min_{y\in Y} F(\varphi, y), \tag{21}$$

то есть минимум достигается на чистых стратегиях.

Следствие 8.1. *Для значения непрерывной игры Γ на прямоугольнике справедливо выражение*

$$v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi). \tag{22}$$

стр. 15

Определение. Точка x' является точкой спектра $\operatorname{Sp}\varphi$ стратегии φ, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (a', b'] \ni x' : \quad b' - a' < \varepsilon, \quad \varphi(b') - \varphi(a') > 0. \tag{23}$$

Теорема 9 (Условие дополняющей нежесткости). *Пусть (φ^0, ψ^0, v) — решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ на прямоугольнике, тогда*

1. *для всех $x \in Sp\varphi^0$ верно $F(x, \psi^0) = v$;*
2. *для всех $y \in Sp\psi^0$ верно $F(\varphi^0, y) = v$.*

1.4 Методы решения матричных игр

стр. 16

Определение. Вектор a, доминирует вектор b, если $a_i \geqslant b_i$, $i = 1, \dots, \ell$. Доминирование строгое, если $a_i > b_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Теорема 10. *Пусть некоторая строка матрицы A доминируется выпуклой комбинацией остальных строк этой матрицы. Тогда эта строка с нулевой вероятностью входит в некоторую оптимальную стратегию первого игрока (и ее можно вычеркнуть).*

стр. 19

Сведение матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования Без ограничения общности считаем, что $a_{ij} > 0$.

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \leqslant j \leqslant n} A(p, j) = \max_{p \in P} \{ u \mid A(p, j) \geqslant u, j = 1, \dots, n \}. \tag{24}$$

Считаем, что $u > 0$, т.к. $A(p, j) > 0$. Новая переменная: $z = (z_1, \dots, z_m)$:

$$z_i = \frac{p_i}{u} \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{u} = \frac{1}{u}. \tag{26}$$

$$v = \max \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \geqslant 1, z_i \geqslant 0, i = 1, \dots, m \right\} =$$

$$= \frac{1}{\min \{ \sum_{i=1}^{m} z_i \mid \sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \geqslant 1, z_i \geqslant 0, i = 1, \dots, m \}} \tag{27}$$

Пусть после решения этой задачи мы получили вектор z_i^0, тогда

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i^0}, \quad p^0 = v z^0. \tag{28}$$

стр. 20

Для второго игрока:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j a_{ij} \leqslant 1, \quad i = i, \dots, m, \quad w_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{29}$$

Оптимальная стратегия второго игрока: $q_0 = v w^0$.

Множество всех оптимальных смешанных стратегий первого игрока:

$$P^0 = \left\{ p^0 \in P \;\middle|\; A(p^0, j) \geqslant v, j = 1, \dots, n \right\}. \tag{30}$$

Так как все ограничения на p^0 линейные, то P^0 — многогранник, поэтому у него есть вершины, которые называются крайними оптимальными смешанными стратегиями первого игрока.

стр. 21

Теорема 11. *Пусть известно, что в игре с матрицей A значение $v \neq 0$. Пусть (p^0, q^0) — пара крайних оптимальных смешанных стратегий первого и второго игрока, тогда существует невырожденная квадратная подматрица $B = (a_{i_\ell j_t})_{k\times k}$, для которой верны следующие системы:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{\ell=1}^{k} p^0_{i_\ell} a_{i_\ell j_t} = v, \quad t = 1, \dots, k, \\ \sum\limits_{\ell=1}^{k} p^0_{i_\ell} = 1; \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{k} a_{i_\ell j_t} q^0_{j_t} = v, \quad \ell = 1, \dots, k, \\ \sum\limits_{t=1}^{k} q^0_{j_t} = 1. \end{cases} \tag{32}$$

1.5 Методы решения игр с вогнутыми и выпуклыми функциями выигрыша

стр. 26

Определение. Пусть X и Y — выпуклые компакты евклидовых пространств, функция F непрерывна на $X \times Y$. Игра $\Gamma = \langle X, Y, F\rangle$ называется игрой с вогнутой (выпуклой) функцией выигрыша, если для всех $y \in Y$ функция $F(\cdot, y)$ вогнута по x (соответственно, для всех $x \in X$ функция $F(x, \cdot)$ выпукла по y).

Теорема 12 (Хелли). *Пусть в евклидовом пространстве E^m задано семейство выпуклых компактов D_α, $\alpha \in A$. Если пересечение любого конечного числа этих компактов непусто, то и пересечение их всех также непусто.*

Теорема 13. *Пусть Γ - игра с вогнутой функцией выигрыша. Тогда нижнее значение игры представимо в виде*

$$\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x,y) = \min_{y^1,\dots,y^{m+1}\in Y}\ \max_{x\in X}\ \min_{1\leqslant j\leqslant m+1} F(x, y^j). \tag{33}$$

стр. 27

Теорема 14. *Игра Γ с вогнутой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида (x^0, ψ^0, v), где x^0 - чистая максиминная стратегия первого игрока, ψ^0 — оптимальная смешанная стратегия второго игрока, представимая в виде:*

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{m+1} q^0_j \delta_{\hat{y}^j}, \tag{34}$$

где q^0 — решение задачи

$$\min_{q\in Q}\max_{x\in X}\Phi(x,q) = \min_{q\in Q}\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m+1} F(x, \hat{y}^j) q_j, \tag{35}$$

а $\hat{y}^j$ — минимизаторы для задачи

$$\min_{y^1,\dots,y^{m+1}\in Y}\ \max_{x\in X}\ \min_{1\leqslant j\leqslant m+1} F(x, y^j). \tag{36}$$

1.6 Многошаговые антагонистические игры

стр. 33 Игра происходит в течение T шагов, текущий шаг обозначается через t.. На каждом шаге игроки выбирают значение контролируемого фактора — альтернативу: x_t для первого игрока и y_t для второго игрока.

Шаг 1: первый игрок выбирает $x_1 \in U_1$; зная x_1, второй игрок выбирает $y_1 \in V_1(x_1)$.

Обозначим

$$\bar{x}_t = (x_1, \dots, x_t), \quad \bar{y}_t = (y_1, \dots, y_t). \tag{37}$$

Шаг t: первый игрок выбирает $x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$, второй игрок выбирает $y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$.

После шага T образуется пара $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ — партия игры. Ее часть $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ называется отрезком партии.

стр. 34 Для любой партии определен выигрыш первого игрока $F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$.

Стратегия первого игрока — набор функций $\{\tilde{x}_t \mid t = 1, \dots, T\}$ вида

$$x_t = \tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}) \in \tilde{U}_t, \tag{38}$$

для второго игрока

$$y_t = \tilde{y}_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}) \in \tilde{V}_t. \tag{39}$$

Эквивалентная запись:

$$\tilde{x} \in \tilde{X} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_t, \quad \tilde{y} \in \tilde{Y} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t. \tag{40}$$

Стратегии первого и второго игрока однозначно определяют партию игры, а, значит, и ее значение $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$. Таким образом, многошаговая игра в нормальной форме записывается так: $\left\langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \right\rangle$.

Определим оптимальные стратегии методом динамического программирования, т.е. в обратном порядке: $\tilde{y}_T^0$, $\tilde{x}_T^0$, …, $\tilde{y}_1^0$, $\tilde{x}_1^0$.

Функция $\tilde{y}_T^0(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}) = y_T^0$ находится следующим образом:

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T^0) = \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T) = F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}), \tag{41}$$

где последняя функция называется функцией Беллмана. Аналогично,

$$F(\bar{x}_{T-1}, x_T^0, \bar{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\bar{x}_{T-1}, x_T, \bar{y}_{T-1}) = F(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}). \tag{42}$$

Далее последовательно определяются все функции $\tilde{x}_t^0$ и $\tilde{y}_t^0$.

Определим число

$$\hat{v} = \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \ldots = \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(x_1)} \ldots \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_T), \tag{43}$$

это будет оптимальное значение игры.

Будем рассматривать два частных случая многошаговой игры:

1. Γ': множества $U_t(\cdot)$, $V_t(\cdot)$ конечны;

2. Γ'': множества $U_t(\cdot) \equiv U_t$, $V_t(\cdot) \equiv V_t$ — компакты метрических пространств. Функция $F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ непрерывна по всем аргументам.

стр. 35 **Теорема 15 (Цермело).** *Всякая многошаговая игра с полной информацией вида Γ' или Γ'' имеет решение вида $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0, \hat{v})$.*

2 Неантагонистические игры

стр. 37

Определение. Игрой в нормальной формы называется набор $\Gamma = \langle I, \{X_k\}_{k=1}^{s}, \{F_k(x)\}_{k=1}^{s} \rangle$, где

- $\star$ $I = \{1, \dots, s\}$ — множество игроков;
- $\star$ X_k — множество стратегий k-го игрока;
- $\star$ $F_k(x) = F_k(x_1, \dots, x_s)$ — функция выигрыша, определенная на множестве ситуаций

$$X = \prod_{k=1}^{s} X_k. \tag{44}$$

Определение. Ситуация x^0 игры Γ называется равновесием (по Нэшу), если

$$\max_{x_k \in X_k} F_k(x^0 \parallel x_k) = F_k(x^0), \quad k = 1, \dots, s. \tag{45}$$

Замечание. В антагонистической игре понятия равновесия и седловой точки эквивалентны.

Определение. Игра, в которой два игрока, а множества допустимых стратегий X_1 и X_2 конечны, называется биматричной.

Выигрыши игроков образуют две матрицы:

$$A = (F_1(i,j))_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (F_2(i,j))_{m \times n} = (b_{ij})_{m \times n}. \tag{46}$$

Определение. Пара стратегий (i_0, j_0) называется равновесием биматричной игры, если

$$a_{ij_0} \leqslant a_{i_0 j_0}, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{47}$$

$$b_{i_0 j} \leqslant b_{i_0 j_0}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{48}$$

стр. 38

Определение. Ситуация x^0 оптимальна по Парето, если

$$\nexists x \in X : \quad F_k(x) \leqslant F_k(x_0), \quad \forall k = 1, \dots, s, \tag{49}$$

и хотя бы одно неравенство выполнено строго.

Замечание. В антагонистической игре любая ситуация оптимальна по Парето. Более того, в игре многих лиц с постоянной суммой любая ситуация также оптимальна по Парето.

Теорема 16 (Брауэр). *Пусть $f : X \to X$ — непрерывная функция, где X — выпуклый компакт в евклидовом пространстве. Тогда существует неподвижная точка функции f, то есть $f(x_0) = x_0$.*

Теорема 17. *Пусть в игре многих лиц Γ множества X_k являются компактами евклидовых пространств, функции выигрыша F_k непрерывны на произведении этих компактов X, каждая функция F_k вогнута по x_k при фиксированных значениях остальных переменных. Тогда в игре Γ существует равновесие.*

стр. 40

Определение. Смешанным расширением биматричной игры называется игра $\langle P, Q, A(p,q), B(p,q) \rangle$, где

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j, \quad B(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j. \tag{50}$$

Лемма 8. *Для того, чтобы пара (p^0, q^0) была равновесием в смешанном расширении биматричной игры, необходимо и достаточно выполнения неравенств*

$$A(i, q^0) \leqslant A(p^0, q^0), \quad i = 1, \ldots, m; \tag{51}$$

$$B(p^0, j) \leqslant B(p^0, q^0), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{52}$$

стр. 41

Теорема 18 (Свойство дополняющей нежесткости). *Пусть пара (p^0, q^0) — ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда*

1. *если $p_i^0 > 0$, то $A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$;*
2. *если $q_j^0 > 0$, то $B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$.*

Теорема 19. *Пусть (p^0, q^0) — ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры. Тогда существуют подмножества чистых стратегий $X^0 \subset X$ и $Y^0 \subset Y$ и числа v_1 и v_2, такие, что верны системы уравнений:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1, \quad \forall i \in X^0; \\ \sum\limits_{j \in Y^0} q_j^0 = 1; \end{cases} \tag{53}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2, \quad \forall j \in Y^0; \\ \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 = 1. \end{cases} \tag{54}$$

Определение. Матрица A удовлетворяет условию общности положения (УОП), если любая подматрица $\bar{A}$ матрицы A и матрица $\begin{pmatrix} & 1 \\ \bar{A} & \vdots \\ & 1 \end{pmatrix}$ имеют максимальный ранг.

Матрица B удовлетворяет условию общности положения, если любая ее подматрица $\bar{B}$ и матрица $\begin{pmatrix} & \bar{B} & \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ имеют максимальный ранг.

стр. 42

Замечание. Множество матриц, для которых выполнено условие общности положения, образует всюду плотное множество в пространстве всех матриц.

Теорема 20. *Пусть элементы матриц A и B положительны, и для них выполнено условие общности положения. Тогда для любой ситуации равновесия (p^0, q^0) в смешанных стратегиях существуют подмножества $X^0 \subset X$, $Y^0 \subset Y$ и числа v_1, v_2, такие, что верны системы (53) и (54) и $\left|X^0\right| = \left|Y^0\right|$.*

Теорема 21. *Пусть A и B — матрицы с положительными элементами. Тогда существует положение равновесия в смешанных стратегиях (p^0, q^0), для которого существуют подмножества $X^0 \subset X$, $Y^0 \subset Y$ и числа v_1, v_2, такие, что верны системы (53) и (54) и $\left|X^0\right| = \left|Y^0\right|$.*

стр. 44

Теорема 22. *Пусть некоторая строка матрицы A строго доминируется выпуклой комбинацией остальных строк матрицы A. Тогда эта строка входит с нулевой вероятностью в любую равновесную смешанную стратегию первого игрока.*

2.1 Иерархические игры двух лиц

стр. 48

Теорема 23 (Гермейер). *Если функции F и G непрерывны на компакте $X \times Y$, тогда величина*

$$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} \inf_{y \in Y(f)} F(f(y), y), \tag{55}$$

$$Y(f) = \operatorname*{Arg\,max}_{y \in Y} G(f(y), y), \tag{56}$$

может быть вычислена как

$$F_2 = \max\{K, M\}, \tag{57}$$

где

$$K = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in D} F(x,y), & D \neq \emptyset, \\ -\infty, & D = \emptyset; \end{cases} \tag{58}$$

$$M = \min_{y\in E}\max_{x\in X} F(x,y); \tag{59}$$

$$D = \{(x,y) \in X \times Y \mid G(x,y) > G_2\}; \tag{60}$$

$$E = \operatorname{Arg}\max_{y\in Y}\min_{x\in X} G(x,y); \tag{61}$$

$$G_2 = \max_{y\in Y}\min_{x\in X} G(x,y). \tag{62}$$

3 Теория принятия решений

стр. 52

3.1 Многокритериальная оптимизация

Определение. Вектор $x^0 \in X$ является оптимальной по Парето стратегией, если не найдется другого вектора $x \in X$, такого, что $w_i(x) \geqslant w_i(x^0)$, $i = 1, \dots, s$, и хотя бы одно неравенство выполнено строго.

Определение. $\Pi(X, w)$ — множество оптимальных по Парето стратегий.

Определение. Стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Слейтеру, если не найдется другого вектора $x \in X$, такого, что $w_i(x) > w_i(x^0)$ при всех $i = 1, \dots, s$.

Определение. $S(X, w)$ — множество оптимальных по Слейтеру стратегий.

Замечание. $S(X, w) \supset \Pi(X, w)$.

стр. 53

Теорема 24. *Пусть X — компакт метрического пространства, $w_i(x)$, $i = 1, \dots, s$ — непрерывные функции. Тогда множество $\Pi(X, w)$ непусто.*

Определим следующие свертки:

$$F_1(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i, \tag{63}$$

$$F_2(\lambda, x) = \min_{1\leqslant i\leqslant s} \lambda_i w_i(x), \tag{64}$$

$$X_2(\lambda) = \operatorname{Arg}\max_{x\in X} F_2(\lambda, x). \tag{65}$$

Здесь $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \mid \lambda_i > 0\}$.

Теорема 25. *Пусть все функции $w_i(x)$ непрерывны и принимают положительные значения на метрическом компакте X. Тогда множество $S(X, w)$ представимо в виде*

$$S(X, w) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_2(\lambda). \tag{66}$$

стр. 55

Определение. Пусть $x^0 \in X$. Будем говорить, что в точке x^0 вектор $\alpha \in E^m$ задает допустимое направление для множества X, если $\exists \varepsilon_0 > 0$, такое, что $\forall 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ верно $x^0 + \varepsilon\alpha \in X$. Множество всех допустимых направлений — $\mathcal{L}(x^0)$.

Теорема 26. *Пусть все функции $w_i(x)$, $i = 1, \dots, s$ являются вогнутыми и непрерывно дифференцируемыми на выпуклом компакте X евклидова пространства E^m. Тогда для того, чтобы $x^0 \notin S(X, w)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало допустимое направление $\alpha \in \mathcal{L}(x^0)$, такое, что $\langle \nabla w_i(x^0), \alpha \rangle > 0$, $i = 1, \dots, s$.*

3.2 Общая задача принятия решения

стр. 57

Определение. Ядром бинарного отношения R на множестве X называется множество

$$C(X,R) = \{x \in X \mid x'Rx \Rightarrow xRx'\}. \tag{67}$$

3.3 Математическая модель операций

стр. 63

Операцией называется совокупность мероприятий, направленных на достижение некоторой цели. Совокупность лиц, или одно лицо, стремящиеся к достижению поставленной цели — *оперирующая сторона.* Специальное лицо в оперирующей стороне — *исследователь операций*; его задача — построить математическую модель с целью ее анализа и рекомендаций по достижению цели.

Для достижения цели оперирующая сторона использует *ресурсы*, количество которых фиксировано.

Контролируемый фактор — величины, выбор значений которых определяет действия оперирующей стороны в операции. Это вектор $x \in M_0$.

Неконтролируемый фактор — величины, влияющие на исход операции, но выбор их значений не находится в распоряжении оперирующей стороны. Они делятся на две группы:

⋆ *Неопределенные факторы* — для них известна только область возможных значений: $y \in N_0$. Это природные неопределенности, стратегии противника, неясность цели.

⋆ *Случайные факторы* — неконтролируемые факторы, которые являются случайными величинами. $\omega \in \Omega$ — закон распределения случайного фактора $z \in Z$.

Степень соответствия исхода поставленной цели задается критерием эффективности $F(x,y,z)$ — функцией, определенной на $M_0 \times N_0 \times Z$.

стр. 64 *Стратегия* — выбор значений контролируемых факторов в зависимости от поступления информации о неконтролируемых факторах, то есть это функция $\tilde{x} : N \times Z \to M_0$. Множество стратегий, соответствующих данной информационной гипотезе, обозначается M.

Чтобы задать модель операции, необходимо описать множества M_0, N, Z, Ω, выбрать функцию $F(x,y,z)$, сформулировать информационную гипотезу и соответствующее ей множество M.

3.4 Оптимальные стратегии в операциях

Принцип гарантированного результата Гермейера: нужно для каждой стратегии $\tilde{x} \in M$ определить оценку эффективности $W(\tilde{x})$. Тогда стратегия $\tilde{x}^0 \in M$ называется оптимальной, если

$$W(\tilde{x}^0) = \max_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) = F_2(M). \tag{68}$$

Предположения:

1. y является либо природной неопределенностью, либо стратегией противников, интересы которых либо противоположны интересам оперирующей стороны, либо неизвестны.

2. Если y — стратегия противника, то он не знает реализации случайного фактора z.

3. Оперирующая сторона разрешает усреднение по случайным факторам.

$$W(\tilde{x}) = \inf_{\omega \in \Omega} \inf_{y \in N} \int_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z) d\omega(z). \tag{69}$$

стр. 65 Если противник знает реализацию z, то

$$W'(\tilde{x}) = \int_{\omega\in\Omega} \int_Z \inf_{y\in N} F(\tilde{x}(y,z),y,z)d\omega(z) \leqslant W(\tilde{x}). \tag{70}$$

Дополнительное предположение: противник не знает реализацию x. Тогда верна следующая формула для оценки эффективности смешанной стратегии:

$$W(\varphi) = \inf_{\omega\in\Omega} \inf_{y\in N} \int_Z \int_{M_0} F(x,y,z)d\varphi(x)d\omega(z). \tag{71}$$

Если противник знает реализацию z, то

$$W'(\varphi) = \inf_{\omega\in\Omega} \int_Z \left[\inf_{y\in N} \int_{M_0} F(x,y,z)d\varphi(x)\right] d\omega(z) \leqslant W(\varphi). \tag{72}$$

Определение. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Стратегия $\tilde{x}^\varepsilon \in M$ называется ε-оптимальной, если

$$W(\tilde{x}^\varepsilon) \geqslant \sup_{\tilde{x}\in M} W(\tilde{x}) - \varepsilon. \tag{73}$$

Определение. Стратегия $\tilde{x}_a \in M$ называется абсолютно оптимальной, если

$$F(\tilde{x}_a(y,z),y,z) = \max_{x\in M_0} F(x,y,z), \quad \forall y \in N,\, z \in Z. \tag{74}$$

стр. 66

Теорема 27. *Пусть во множестве M существует абсолютно оптимальная стратегия. Тогда*

$$F_2(M) = \int_{\omega\in\Omega} \inf_{y\in N} \int_Z \max_{x\in M_0} F(x,y,z)d\omega(z) = F_u \tag{75}$$

и абсолютно оптимальная стратегия является оптимальной.

Следствие 27.1. *Пусть при всех $y \in N$, $z \in Z$ достигается максимум*

$$\max_{x\in M_0} F(x,y,z). \tag{76}$$

Тогда для множества стратегий M_u с полной информацией наилучший гарантированный результат равен $F_2(M_u) = F_u$.

Определение. Пусть дано число $\varepsilon > 0$. Стратегия $\tilde{x}_a^\varepsilon \in M$ называется ε-абсолютно оптимальной, если

$$F(\tilde{x}_a^\varepsilon(y,z),y,z) \geqslant \sup_{x\in M_0} F(x,y,z) - \varepsilon, \quad \forall y \in N,\, z \in Z. \tag{77}$$

Теорема 28. *Пусть при $\forall\varepsilon > 0$ во множестве M существует ε-абсолютно оптимальная стратегия $\tilde{x}_a^\varepsilon$. Тогда*

$$F_2(M) = \inf_{\omega\in\Omega} \inf_{y\in N} \int_Z \sup_{x\in M_0} F(x,y,z)d\omega(z) = F_u. \tag{78}$$

Следствие 28.1. *Пусть для всех $y \in N$, $z \in Z$ верно*

$$\sup_{x\in M} F(x,y,z) < +\infty. \tag{79}$$

Тогда для множества стратегий M_u верно $F_2(M_u) = F_u$.

Теорема 29. *1. $F_2^0 \leqslant F_c \leqslant F_u$, где $F_2^0 = F_2(M_0)$, $F_c = F_2(\{\varphi\})$, $F_u = F_2(M_u)$.*

2. Пусть отсутствует случайный фактор z. Пусть $F(x,y)$ непрерывна на $M_0 \times N$, где M_0 и N — параллелепипеды евклидовых пространств. Тогда, если F вогнута по x, то $F_2^0 = F_c$. Если F выпукла по y, то $F_c = F_u$.

3.5 Необходимое условие оптимальной (максиминной) стратегии

стр. 68 Пусть случайные факторы z отсутствуют, информации о неконтролируемых факторах нет: $M = M_0$. Тогда стратегия $x^0 \in M_0$ оптимальная, если

$$W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x), \tag{80}$$

где

$$W(x) = \min_{y \in N} F(x, y). \tag{81}$$

Теорема 30. *Пусть $x \in D \subset E^m$, D — открытое множество. Пусть N — компакт метрического пространства. Пусть $F(x,y)$, $F_{x_i}(x,y)$, $i = 1, \ldots, m$ — непрерывные функции на $D \times N$. Тогда $\forall x \in D$, $\forall \alpha in E^m$ существует производная по направлению функции минимума:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\min_{y \in NF(x,y)}\right] = \min_{y \in N(x)} \langle \alpha, F_x(x, y) \rangle, \tag{82}$$

где

$$N(x) = \operatorname*{Arg\,min}_{y \in N} F(x, y). \tag{83}$$

стр. 69 **Следствие 30.1.** *Пусть $M_0 \subset D \subset E^m$ — выпуклый компакт, D — открытое множество и верны все предположения теоремы. Тогда для оптимальной стратегии $x^0 \in M_0$ верно*

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{L}(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \left\langle \alpha, F_x(x^0, y) \right\rangle \leqslant 0. \tag{84}$$

Теорема 31. *Пусть $x \in M_0 = [a, b] \subset D$, $y \in N$ — компакт метрического пространства. Функции $F(x,y)$, $F_x(x,y)$ непрерывны на $D \times N$. Пусть $x^0 \in M_0$ — оптимальная стратегия. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

1. *Либо $x^0 = a$, либо $x^0 = b$.*
2. *Существуют $y^1 \neq y^2 \in N(x^0)$, т.е. множество $N(x^0)$ содержит по крайней мере 2 элемента.*
3. *$N(x^0) = \{y^1\}$, но пери этом $F_x(x^0, y^1) = 0$.*

3.6 Некоторые задачи оптимального распределения ресурсов

стр. 71 Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — распределение ресурса, $A > 0$ — общее количество ресурса. Ресурсы бывают двух типов: непрерывные (бесконечно делимые) и дискретные. Множество стратегий:

$$M_0 = \left\{ x \in E^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{85}$$

В дискретном случае числа A и x_i должны быть целыми:

$$M_0' = \left\{ x \in E^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \geqslant 0, x_i \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{86}$$

Рассмотрим непрерывную задачу на максимин:

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x_i) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x_i^0). \tag{87}$$

Пусть $f_i(t)$ — непрерывные возрастающие функции на $[0, A]$, причем

$$f_1(0) \leqslant f_2(0) \leqslant \ldots \leqslant f_n(0). \tag{88}$$

Теорема 32 (Принцип упорядочивания Гермейера). *Пусть x^0 — оптимальное распределение ресурсов при сделанных предположениях. Тогда для x^0 верно необходимое и достаточное условие: существует номер k, $1 \leqslant k \leqslant n$, такой, что*

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0), & i = 1, \dots, k-1, \\ x_i^0 = 0, & i = k+1, \dots, n. \end{cases} \tag{89}$$

стр. 72 Рассмотрим теперь дискретную задачу:

$$\max_{x \in M_0'} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x_i^*). \tag{90}$$

Обозначим

$$I(x) = \operatorname*{Arg\,min}_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x_i). \tag{91}$$

стр. 73

Теорема 33. *Пусть x^* — такое оптимальное распределение ресурсов в дискретной задаче, для которого число элементов в $I(x^*)$ минимально. Тогда выполняется необходимое условие: если $x_j^* > 0$, то*

$$f_j(x_j^* - 1) \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i(x_i^*), \tag{92}$$

причем последнее неравенство является достаточным условием для того, чтобы x^* было просто оптимальным распределением.

стр. 74 Рассмотрим теперь задачу

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0). \tag{93}$$

Здесь $f_i(t)$ — дифференцируемые (необязательно монотонные) функции на $[0, A]$.

Теорема 34 (Лемма Гиббса).

1. *Пусть x^0 — оптимальное распределение ресурсов, тогда существует число λ, такое, что*

$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = \lambda, & x_i^0 > 0; \\ f_i'(x_i^0) \leqslant \lambda, & x_i^0 = 0. \end{cases} \tag{94}$$

2. *Пусть известно также, что функции $f_i(t)$ вогнуты, тогда условие (94) является достаточным для оптимальности x^0.*

3. *Пусть функции f_i упорядочены следующим образом:*

$$f_1'(0) \geqslant f_2'(0) \geqslant \ldots \geqslant f_n'(0); \tag{95}$$

пусть $f_i''(0) < 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда существует номер ℓ, такой, что для оптимального распределения x^0 верно

$$\begin{cases} x_i^0 > 0, & i = 1, \dots, \ell; \\ x_i^0 = 0, & i = \ell + 1, \dots, n. \end{cases} \tag{96}$$

стр. 76

Теорема 35. *Пусть $f_i(t)$ — вогнутые функции дискретного аргумента. Тогда для оптимального распределения ресурсов верно необходимое и достаточное условие: если $x_j^* > 0$, то*

$$f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*) \right]. \tag{97}$$